SMOOTHNESS OF RANK M SCALING FUNCTIONS AND TRANSFER OPERATORS

矢ヶ崎 達彦　（京都工芸繊維大学・工芸学部）　(2002.12.18)

時間周波数解析において重要な wavelet の滑らかさを考察する。Rank M orthogonal wavelets は rank M orthogonal scaling function から構成され，両者の滑らかさは一致する。そこで，以下では，rank M orthogonal scaling function の中で 特に重要なクラスである

$\varphi_{M,N}$: of maximal degree N and minimal length MN

$\varphi_{M,N,L}$: of maximal degree N and finite length L $(\geq MN)$

について，その滑らかさを考察する。

$\varphi = \varphi_{M,N,L}$ の Hölder exponent を $\alpha(\varphi)$ で，また，s_p-exponent $(p > 0)$ を $s_p(\varphi)$ で 表す。φ は compact support を持つので，次の不等式が成り立ち，φ の滑らかさ $\alpha(\varphi)$ を $s_p(\varphi)$ で評価できる：

$$s_2(\varphi) - \frac{1}{2} \ \leq \ s_1(\varphi) \ \leq \ \alpha(\varphi) \ \leq \ s_p(\varphi) \quad (p \geq 2).$$

$p = 2$ の場合は，Heller - Wells によって 既に考察され，次の等式が示されている：

$$s_2(\varphi) = N - \frac{1}{2} \log_M \rho(T_{|Q|^2})$$

但し，$Q(\xi)$ は φ の the reduced symbol，$T_{|Q|^2}$ は $|Q|^2$ を weight function とする $[0, \pi]$ 上での transfer operator，$\rho(T_{|Q|^2})$ は $T_{|Q|^2}$ の the spectral radius である。$T_{|Q|^2}$ は ある有限次元の invariant subspace V を持ち，$T_{|Q|^2}$ は V 上で positive matrix で表される。$\rho(T_{|Q|^2})$ は，この行列の最大固有値に一致し，数値計算で精密に求めることができる。これにより Heller - Wells は，$M = 2, 3$ の場合の $\alpha(\varphi_{M,N})$ の仔細な評価や，$s_2(\varphi_{M,N})$ の $N \to \infty$ での 漸近的な振る舞い，また，$L > MN$ とする事 及び Q に 零点 を持たせること による滑らかさの改良 等のついて議論している。

これに対して，[1] において 我々 は 一般の $p > 0$ に対して $s_p(\varphi)$ 及び $T_{|Q|^p}$ を考察し, 次の結果を得た：

定理 1. (i) $s_p(\varphi) \geq N - \dfrac{1}{p} \log_M \rho(T_{|Q|^p})$.

(ii) $s_p(\varphi) \leq N - \dfrac{1}{p} \sup\{\log_M \mu(f) \mid f \in K^0\}$　 if Q satisfies Cohen's condition.

但し，$\mu(f) = \operatorname{ess\,inf}_{[0,\pi]} (T_{|Q|^p}(f)/f)$，$K^0 = \{f \in L^\infty([0, \pi]) \mid \operatorname{ess\,inf}_{[0,\pi]} f > 0\}$ である。

系 1. If $Q(\xi)$ has no zero in $[0, \pi]$, then $s_p(\varphi) = N - \dfrac{1}{p} \log_M \rho(T_{|Q|^p})$

実際に $|Q|$ を階段関数で近似して 数値計算で $\rho(T_{|Q|})$ を求め，上の結果を応用して $s_1(\varphi)$ 及び $\alpha(\varphi)$ を評価した。その結果，いくつかの例に関して，滑らかさの評価を改良することができた。

[1] Smoothness of rank M scaling functions, F. Maitani, A. Nakaoka, H. Ôkura and T. Yagasaki, to appear in Applied and computational harmonic analysis.